17/10/19

Προβληματα Αρχικων Τιμων

$$\begin{cases} y'(t) = f(\overset{\text{μεξ. μετ.}}{y}, \underset{\text{ανεξ}}{t}) & t\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

Σ.Δ.Ε., $1^{ης}$ τάξης, $1^{ου}$ βαθ.
γρ. ή μη γρ., ομογ. ή μη ομογ.

αν εχω πολυώνυμο, γρ. οφο:

$f(y,t) = p(t)y(t) + q(t)$ αν f πολ./μο $1^{ου}$ β. ως προς το y

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)y(t) + q(t) & t\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

: τοτε εχουμε γενικη λύση για αυτήν την Δ.Ε. αρα μπορουμε να βρουμε λυση για το Π.Α.Τ.

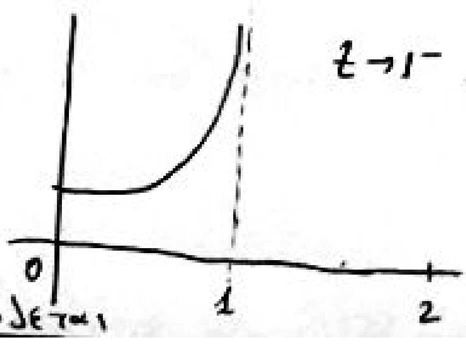
Παρατηρηση

Για γενική συνάρτηση (ενδεχομένα μη-γραμ.) δεν είναι πάντα εύκολο να εχω λύση σε κλειστή μορφή ($y(t)=\dots$) αλλά ούτε μπορούμε να εγγυηθούμε (1) υπαρξη (2) μοναδικότητα της λυσης

π.χ 1: $\begin{cases} y' = y^2, & t\in[0,2] \\ y(0)=1 \end{cases}$ Σ.ΔΕ. $1^{ης}$ ταξ., $1^{ου}$ βαθμ., ομογ.

$t\to 1^-$ ή $y(t)\to+\infty$

$y(t) = \dfrac{1}{1-t}$, $t\in[0,2]$



(1) δεν ικανοποιείται η υπαρξη της λυσης σε ολο το διαστημα που οριζεται

Π.χ. $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Παρατηρώ ότι η $y(t) = 0$ ικανοποιεί την Δ.Ε. άρα αποτελεί λύση του Π.Α.Τ. (τετριμμένη λύση)

Γράφουμε: $\frac{y'}{\sqrt{|y|}} = 1$, $t \in [0,1] \Rightarrow 2(\sqrt{|y|})' = 1 \Rightarrow 2\int_{t^*}^{t} (\sqrt{y(s)})' ds = \int_{t^*}^{t} ds$

$\Rightarrow \sqrt{y(t)} - \sqrt{y(t^*)} = \frac{1}{2}(t - t^*) \Rightarrow \sqrt{y(t)} = \frac{1}{2}(t - t^*) + \sqrt{y(t^*)} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{t - t^*}{2} + \sqrt{y(t^*)} \right)^2$

1η λύση η τετριμμένη $y(t) = 0$.

2η λύση π.χ. $t^* = 0$: $y(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2$

είναι μια λύση

αν επιλέγω $t^* = \frac{1}{2}$ τότε $y(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{(t - \frac{1}{2})^2}{4} & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

αν αλλάξω τη συνθήκη $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$ έχω άλλη λύση.

μπορώ να βρω πολλές λύσεις ανάλογα με τη συνθήκη άρα δεν έχω μοναδικότητα

Παρατήρηση

Λύσεις προβλημάτων που δεν λύνονται μονοσήμαντα είναι πολύ δύσκολο να προσεγγισθούν αριθμητικά.

Στην περίπτωση προβλημάτων που εξασφαλίζεται το μονοσήμαντο τα πράγματα είναι απλούστερα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ύπαρξη και Μοναδικότητα Λύσης για Σ.Δ.Ε.)

Έστω $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (βαθμωτή συνάρτ.) είναι (1) συνεχής συνάρτηση, (2) πληροί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλ.

συνθ. Lipschitz: $\exists\, L \geq 0\ \forall t \in [a,b],\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}: |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$

Τότε $\forall\, y_0 \in \mathbb{R}$ (αρχική συνθ.) το Π.Α.Τ.: $\begin{cases} y'(t) = f(y,t) & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ λύνεται μονοσήμαντα.

Σημείωση

Αν η f είναι παραγωγίσιμη ως προς την μεταβλητή y, και ισχύει ότι:

$\exists\ M \in \mathbb{R}^{*}, \forall\ t \in [a,b], \forall\ y \in \mathbb{R} : \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = |f_y| \leq M$

δηλ. η f_y είναι φραγμένη τότε η f πληροί την συνθήκη του Lipschitz : $L = M$.

σε ένα συγκεκριμ. σημείο του διαστήματος

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $f(y_1,t) - f(y_2,t) = f_y(\tilde{y},t)(y_1 - y_2)$

Θ.Μ.Τ του Δ.Λ.

$|f(y_1,t) - f(y_2,t)| = \underbrace{|f_y(\tilde{y},t)|}_{\text{φραγμένη}}|y_1 - y_2| \leq M|y_1 - y_2|$ άρα κ' Lipschitz.

Δηλ. $|f(y_1,t) - f(y_2,t)| \leq \underset{L}{\underset{\parallel}{M}}|y_1 - y_2|$

Αυτό ισχύει στην περίπτωση που η f είναι της μορφής:

$$\begin{cases} f(y,t) = p(t)y(t) + q(t) & \text{γρ. πολυών.} \\ f(y,t) = p(t)\begin{matrix}\sin y \\ \cos y\end{matrix} & \text{(μη γραμ. αλλά φραγμένη)} \end{cases}$$

(p, q φραγμ.)

Παραδ.

$$\begin{cases} y' = y^2 = f(y,t), \quad t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f(y,t) = y^2$, $f_y(y,t) = 2y$, $|f_y| \to \infty$, $y \pm \infty$

άρα η f δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

Η συνθήκη L λέγεται κ' ολική συνθήκη Lipschitz.

Θεώρημα (Τοπικής Υπαρξης και Μοναδ. της λύσης της ΣΔΕ)

Εστω $c>0$ και $f \in C([a,b]\times[y_0-c, y_0+c])$. Αν η f πληροί στο $[a,b]\times[y_0-c, y_0+c]$ τη συνθήκη Lipschitz:

$\exists L \geq 0, \forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in [y_0-c, y_0+c]: |f(y_1,t)-f(y_2,t)| \leq L|y_1-y_2|$

Τοτε το Π.Α.Τ. :
$$(1)\begin{cases} y'(t) = f(y,t), & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$
λυνεται μονοσημαντα τουλ. στο $[a,b']$, $b' = \min\left(b, a+\frac{c}{A}\right)$, $A = \max\limits_{t\in[a,b], y\in[y_0-c, y_0+c]} |f(y,t)|$

Παρατηρηση:

Η συνεχεια της f, $f\in C([a,b]\times\mathbb{R})$ εξασφαλιζει την υπαρξη λύσης του Π.ΑΤ. (1) στο διαστημα $[a,b']$, δεν εξασφαλιζει ομως την μοναδικότητα.

Για παράδειγμα: $f(x) = \sqrt{|x|}$, τότε για το Π.Α.Τ.:
$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} & t\in[0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Δεν ισχύει η τοπική συνθηκη του L ως προς y σε κανενα διάστημα που περιεχει το 0. Γιατί $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{1}{2\sqrt{|y|}}$, $y\to 0$ ή $f_y \to \infty$.

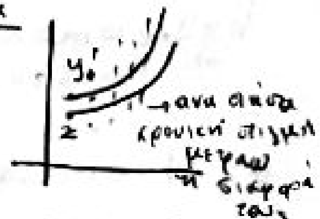
Ευστάθεια λύσης Π.Α.Τ. (συνεχής εξάρτηση της λυσης απο τα αρχικά δεδομένα)

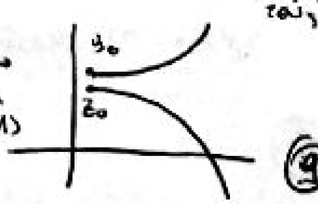
Για δοσμένες αρχικές τιμές $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα Π.Α.Τ.
$$\begin{cases} y' = f(y,t) & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z' = f(z,t), & t\in[a,b] \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

(αλλάζω το y_0, z_0 και βλεπω αν οι λύσεις είναι κοντά)

Εστω ότι η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη του Lipschitz., η f είναι συνεχή, στο $[a,b]\times\mathbb{R}$. Τοτε τα Π.Α.Τ. εχουν μοναδική λύση τις $y, z \in C'[a,b]$

π.χ





Θετουμε: $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$ και θελουμε να εκτιμησουμε χρονοεξαρτωμενη εν την $|\varepsilon(t)|$ ως συναρτηση της: με ενδιαφερα η μεγιστη διαφορά

$|\varepsilon(a)| = |y_0 - z_0|$

$\varepsilon'(t) = y'(t) - z'(t) = f(y,t) - f(z,t) \quad , t \in [a,b]$

$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = (f(y,t) - f(z,t))\,\varepsilon(t)$ χρησι την αρχή Lipschitz:

$$\varepsilon\varepsilon' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varepsilon^2(t)) \leq |f(y,t) - f(z,t)|\,|\varepsilon(t)| \leq L\,\varepsilon^2(t) \quad t \in [\alpha, b]$$

$$|f(y,t) - f(z,t)| \leq L|\varepsilon(t)|$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varepsilon^2(t)) \leq L\,\varepsilon^2(t)$ Θετουμε $\varepsilon^2 = \phi(t)$

$\Rightarrow \phi'(t) \leq 2L\phi(t) \Rightarrow \phi' - 2L\phi \leq 0 \quad t \in [\alpha, b]$

πολ/ζω e^{-2Lt} $\Big|\; e^{-2Lt}\phi' - 2Le^{-2Lt}\phi \leq 0 \Leftrightarrow (\underbrace{e^{-2Lt}\phi(t)}_{g(t)})' \leq 0$

Συνεπώς η $g(t) = e^{-2Lt}\phi(t)$ φθίνει όταν $t \in [a,b]$

δηλ. $e^{-2Lt}\phi(t) \leq e^{-2La}\phi(a) \quad , t \in [\alpha, b] \Rightarrow \varepsilon^2(t) \leq e^{2L(t-a)}\varepsilon^2(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq e^{L(t-a)}|\varepsilon(a)| \quad , t \in [\alpha, b]$

↳ το σφαλμα και απολυτη τιμη, δηλ. η διαφορά φραζεται απο κατι.

$\max\limits_{t\in[\alpha,b]}|\varepsilon(t)| \leq e^{L(b-a)}|\varepsilon(\alpha)| \rightarrow$ (1) εκφραζει τη συνεχη εξαρτηση της λυσης του προβληματος ΠΑΤ (1) απο τα αρχικα δεδομενα.

Νορμα Απειρου : $\|\cdot\|_\infty$

Γ διασπορά ή διαφορά διαταραχης αναλυτ. αριθμ.

$\|y\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]}|y(t)|$ $\Big|\; \max|y(t) - z(t)| \leq \underbrace{e^{L(b-a)}}_{C}|y_0 - z_0|$

(2) Η συνθηκη αυτη εξαρτάται απο το πρόβλημα $C = e^{L(b-\alpha)}$ γιατι η σταθερα C εξαρτάται απο το $[\alpha, b]$ και απο την f

Γραμμική Περίπτωση (πρόβλημα δοκιμής)

Αν η f είναι γραμμική ως προς y, $f(y,t) = \lambda(t) \cdot y(t) + \mu(t)$ τότε η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz αν και μόνο αν η $\lambda(t)$ παίρνει μη θετικές τιμές.

$$\varepsilon(t) = y(t) - z(t) \ : \ \begin{cases} y' = \lambda y + \mu \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z' = \lambda z + \mu \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

$$\varepsilon'(t) = y' - z' = \lambda(y-z) + \mu - \mu$$

<u>Παρατήρηση</u>: Επειδή συνήθως δουλεύω με διαφορές δηλ. $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$ καλύτερα να χρησ. ως πρόβλημα δοκιμής το ομογενές γραμ. πρόβλ.:

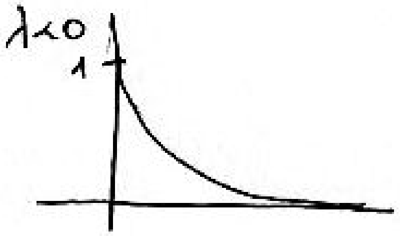
$$1(\alpha) \begin{cases} y' = \lambda y \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad t \in [a,b].$$

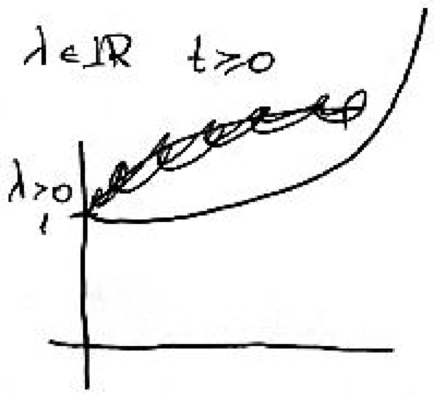
Το $1(\alpha)$ έχει αναλ. λύση: $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Συγκεκριμένα όταν το Π.Α.Τ.

$$1(b) \begin{cases} y' = \lambda y \quad t \geq 0 \ \lambda \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

αναλ. λύση: $y(t) = e^{\lambda t}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $t \geq 0$





άρα θέλω $\lambda < 0$. $t \to \infty$, $\lambda \to 0$.